

Leren rekenen

Leren rekenen

Werken met de
modellen uit
het Protocol ERWD

Cathe Notten
Bronja Versteeg

2025

>g uitgeverij
van gorcum

© 2025

Uitgeverij Van Gorcum BV

Dr. Nassaulaan 5, 9401 HJ Assen.

>g uitgeverij
van gorcum

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. (Her)gebruik van informatie uit deze uitgave is niet toegestaan, verwerking door AI-applicaties is eveneens verboden.

NUR 646

ISBN folio 9789023260271

ISBN e-book 9789465070346

Eerste druk 2014

Tweede, geheel herziene druk 2019

Derde, geheel herziene druk 2025

Uitgave: Uitgeverij Van Gorcum, Assen

Grafische verzorging en epub: LINE UP boek en media bv, Groningen

Omslagontwerp: Richard Bos Grafische Vormgeving & Illustratie, Wergea

Druk: Drukkerij Van Gorcum, Meppel

Inhoud

Voorwoord	8
Leeswijzer	10

Hoofdstuk 1 Visie en uitgangspunten 12

1.1	Visie op reken-wiskundeonderwijs	14
1.2	Functionele gecijferdheid	15
1.3	Professionele gecijferdheid: de eigen rekervaardigheid van de leerkracht	19
1.4	Professionele gecijferdheid: de vakdidactische kennis van de leerkracht	20
1.5	Lesgeven op spoor 1, 2 en 3	22
1.5.1	Lesgeven op spoor 1: de homogene groep	23
1.5.2	Lesgeven op spoor 2: differentiatie in subgroepen	24
1.5.3	Lesgeven op spoor 3: ook een individuele benadering	25

Hoofdstuk 2 Leerlijnen en rekendoelen 28

2.1	De opbouw van leerlijnen	30
2.1.1	Een leerlijn	30
2.1.2	Tussendoelen	32
2.1.3	Verbanden tussen leerlijnen	34
2.1.4	Leerstoflijnen in de methode	36
2.2	Rekendoelen in de onderbouw	38
2.3	Kerdoelen	41
2.4	Referentieniveaus	43
2.5	Passende Perspectieven rekenen	50

Hoofdstuk 3 Hoofdfasen in de leerlijn		54
3.1	De vier hoofdfasen binnen een leerlijn	56
3.2	Hoofdfase 1: begripsvorming	57
3.2.1	Betekenisvolle context	59
3.2.2	Ontwikkelen van rekenkennis en rekenconcepten	61
3.2.3	Ontwikkelen van rekentaal	65
3.2.4	Modellen	72
3.2.5	Begripsvorming binnen meten	75
3.3	Hoofdfase 2: ontwikkelen van oplossingsprocedures	76
3.3.1	Contexten, materialen en modellen	78
3.3.2	Strategieën en oplossingsprocedures	79
3.4	Hoofdfase 3: vlot rekenen en automatiseren	86
3.4.1	Memoriseren en automatiseren	87
3.4.2	Het Rekenmuurtje	88
3.4.3	Effectief oefenen	90
3.4.4	Knelpunten bij vlot leren rekenen	93
3.5	Hoofdfase 4: flexibel toepassen van reken-wiskundige kennis en vaardigheden	94
Hoofdstuk 4 Het handelingsmodel		98
4.1	Het handelingsmodel	100
4.2	De handelingsniveaus	106
4.2.1	Het eerste handelingsniveau: informeel handelen in werkelijkheidssituaties (doen)	106
4.2.2	Het tweede handelingsniveau: gebruikmaken van representaties van werkelijke objecten en situaties (realistische denkmodellen)	113
4.2.3	Het derde handelingsniveau: gebruikmaken van abstract rekenmateriaal. Een volgende stap in de schematisering en abstrahering van de werkelijkheid	118
4.2.4	Het derde handelingsniveau: gebruikmaken van schematische en abstracte representaties (wiskundige denkmodellen)	120
4.2.5	Het vierde handelingsniveau: formele berekeningen uitvoeren (symbolen)	128

Hoofdstuk 5 Het drieslagmodel 132

5.1	Het drieslagmodel	134
5.2	Rekenen met contextvraagstukken	136
5.3	Observeren met het drieslagmodel: de rechteras	141
5.3.1	Oefenen met contexten	143
5.4	Observeren met het drieslagmodel: onderste as	146
5.5	Observeren met het drieslagmodel: linker as	150
5.6	Aanbod afstemmen op observaties	154

Hoofdstuk 6 Diagnosticerend onderwijzen met de drie modellen 156

6.1	Diagnosticerend onderwijzen	158
6.1.1	Sturen op beheersing van de rekendoelen	158
6.1.2	Vroegtijdig signaleren	160
6.1.3	Pendelen met de ERWD-modellen	162
6.1.4	Afgestemde verlengde instructie	168
6.2	Vertaalcirkel	170
6.3	Diagnostisch rekengesprek	180
6.3.1	Rekengesprek over de rekenbeleving	181
6.3.2	Rekengesprek over het rekenproces	182
6.4	Zorgniveaus en het fasenmodel	190

Verklarende woordenlijst	194
--------------------------	-----

Gebruikte literatuur	202
----------------------	-----

Voorwoord

In het onderwijs staan we voortdurend voor de uitdaging om leerprocessen zo te begeleiden dat iedere leerling kan groeien en tot bloei komt. Bij rekendidactiek is dit niet anders. Hoe helpen we kinderen om grip te krijgen op abstracte concepten en uiteindelijk te leren rekenen met begrip en inzicht? Hoe ziet een rijke rekenomgeving eruit waarin afgestemd wordt op de verschillende kinderen in de klas? Welke materialen en didactische modellen kunnen we inzetten om deze groei op een effectieve en betekenisvolle manier te stimuleren?

Een vraag die deze uitdaging voor de zwakke rekenaars in de klas mooi samenvat is: 'Hoe leer je een rups vliegen?' Deze ogenschijnlijk eenvoudige vraag brengt ons direct bij de kern van het onderwijs. De vraag verwijst naar het proces van geleidelijke ontwikkeling, waarbij iedere stap essentieel is om tot het uiteindelijke doel te komen. Een rups kan niet in één keer transformeren tot een vlinder; er is tijd, een goede voedingsbodem, de juiste temperatuur in de vorm van een stimulerende rekenomgeving, zorgvuldige begeleiding en een duidelijke ontwikkelingslijn voor nodig om de verschillende fasen te ondersteunen. Zo werkt het ook in het rekenonderwijs. We begeleiden leerlingen stap voor stap, ondersteunen door goed opgebouwde leerlijnen en effectieve didactische modellen, naar een niveau waarop ze zelfstandig, flexibel en creatief met rekenen kunnen omgaan. Voor de meeste leerlingen is een rijke bloementuin voldoende, voor de zwakke rekenaars vraagt het meer vakmanschap en de ondersteuning van een tuinman en bioloog.

In 2011 verscheen het *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie* (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011). Het protocol benadrukt dat goed rekenonderwijs staat of valt met de professionaliteit van leerkrachten en een adequate begeleiding van leerlingen. In dit boek werken we in deze lijn door en verkennen we de fundamenteën van de rekenleerlijnen en verdiepen we de didactische modellen die leerkrachten helpen om rekenonderwijs te geven dat aansluit bij de behoeften en ontwikkelingsfasen van

hun leerlingen en zo de stapsgewijze groei van rups naar vlinder mogelijk maken.

Ons doel is om een brug te slaan tussen theorie en praktijk, zodat iedere leraar zich gesteund voelt om de rups te begeleiden op weg naar het vliegen. Met deze handvatten hopen we bij te dragen aan een beredeneerde, rijkere rekenervaring in de klas, een ervaring die leerlingen ondersteunt in hun groei naar gecijferdheid en zelfvertrouwen.

We wensen je veel leesplezier, handvatten en inspiratie toe in het ontdekken van de weg van de rups naar de vlinder.



Leeswijzer

Leren rekenen: Werken met de modellen uit het Protocol ERWD richt zich op pabostudenten en beginnende leerkrachten in het basisonderwijs die hun kennis van rekenleerlijnen en rekendidactiek willen verdiepen om een goede rekenles te kunnen geven. Daarnaast is het boek bestemd voor rekencoördinatoren, intern begeleiders (IB'ers) en kwaliteitscoördinatoren (KC'ers) die samen met de leerkrachten van hun team de ERWD-modellen willen verdiepen om boven de rekenmethode te gaan staan om het rekenwiskundeonderwijs nog beter af te stemmen op de ontwikkeling van alle leerlingen in de school. De leerkracht heeft wat te doen als het leren rekenen niet vanzelf gaat.

Wegwijs in het boek


Het boek heeft zes hoofdstukken. Hoofdstuk 1 beschrijft de visie op goed rekenonderwijs en de uitgangspunten van het boek. Daarnaast gaat het in op het belang van de functionele en professionele gecijferdheid van de leerkracht en het sporenmodel waarin de mate van afstemming op de leerlingen in de klas wordt beschreven. In hoofdstuk 2 wordt de opbouw van leerlijnen en de tussendoelen daarbinnen beschreven en gaan we in op het referentiekader en de Passende Perspectieven voor leerlingen die het streefniveau in het basisonderwijs niet zullen halen. De hoofdstukken 3, 4 en 5 behandelen de modellen uit het Protocol ERWD: het hoofdfasenmodel, het handelingsmodel en het drieslagmodel. De modellen vullen elkaar aan. In ieder hoofdstuk wordt daarom verwezen naar de relatie met de andere modellen om te stimuleren de modellen in samenhang te gebruiken. In hoofdstuk 6 komen de drie modellen samen en krijg je voorbeelden hoe je de modellen kunt gebruiken om leerstof op te bouwen, hiaten vroegtijdig te signaleren en te analyseren en een passende aanpak te kiezen voor de rekenproblemen die de leerling ervaart.

Bij de start van elk hoofdstuk worden de leerdoelen van het hoofdstuk benoemd. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de kern, een korte samenvatting van de essentie van het hoofdstuk.

De belangrijkste begrippen zijn beschreven in de verklarende woordenlijst achter in het boek. De begrippen zijn gekleurd als ze voor de eerste keer voorkomen in de hoofdstukken waarin ze worden uitgelegd.

De website

Je krijgt het gebruik van de ERWD-modellen onder de knie als je ze gaat toepassen in je eigen klas of school. Bij dit boek hoort daarom een website: www.erwd.nl. Op deze website vind je aanvullende informatie in de vorm van artikelen, verwijzingen naar boeken en websites en per hoofdstuk een aantal praktische opdrachten om de kennis toe te passen.

Het pictogram  in de kantlijn verwijst naar deze achtergrondinformatie. In de online omgeving is het artikel, de verwijzing naar een boek of de link naar een website opgenomen.

Op de site vind je een blad met de afbeeldingen van de modellen overzichtelijk op een rijtje. Het advies is om dit bestand uit te printen en te gebruiken bij het lezen van dit boek en toe te voegen aan de handleiding van de rekenmethode zodat je de modellen steeds kunt gebruiken bij het afstemmen van het rekenaanbod op de leerlingen.

Daarnaast zijn suggesties voor verwerkingsopdrachten opgenomen waarmee de informatie uit het boek toegepast kan worden in de eigen praktijk. Hoe ingewikkeld het in het begin ook lijkt, start en ga het gewoon uitproberen in de klas.

Gebruikte termen

Voor een goede leesbaarheid gebruiken we het woord ‘rekenen’ en we bedoelen daarmee de binnen het reken-wiskundeonderwijs bekende reken-domeinen zoals die ook in de referentieniveaus zijn beschreven: getallen, verhoudingen, meten en meetkunde, en verbanden. Met ‘basisonderwijs’ bedoelen wij het basisonderwijs, het speciaal basisonderwijs en het speciaal onderwijs.

Hoofdstuk 1

Visie en uitgangspunten

In 2011 verscheen het *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie* (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011). Het *Protocol ERWD* is ontwikkeld voor onderwijsprofessionals in het (speciaal) basisonderwijs en het speciaal onderwijs en beschrijft hoe je hiaten vroegtijdig kunt signaleren en het rekenaanbod rekeninhoudelijk kunt **afstemmen** op de rekenvaardigheid van de leerlingen om zo een ononderbroken ontwikkeling te realiseren en rekenproblemen te voorkomen. Rekenproblemen ontstaan in de meeste gevallen als het rekenonderwijs onvoldoende aansluit op de rekenvaardigheid en **onderwijsbehoeften** van de leerling. Door te starten vanuit de **zone van naaste ontwikkeling** en aan te sluiten bij de rekenvaardigheid (voorkennis) van de leerling zorg je ervoor dat hij of zij weer tot leren kan komen. De ERWD-**modellen** geven steun bij het voorbereiden van de rekenles, het observeren en afstemmen tijdens de rekenles en het evalueren en bijstellen na afloop. Deze afstemming is voor alle leerlingen in de klas essentieel om te kunnen komen tot rekenen met inzicht en begrip. Er is pas sprake van dyscalculie als ondanks goede rekeninhoudelijke afstemming de rekenontwikkeling stagneert.

In het protocol wordt een visie op goed reken-wiskundeonderwijs gegeven. Deze visie is ook het uitgangspunt van dit boek. Het belangrijkste doel van het rekenonderwijs is dat leerlingen voldoende gecijferdheid ontwikkelen. Dit betekent dat leerlingen functioneel leren rekenen én wiskundig leren denken. Functioneel leren rekenen betekent dat ze in staat zijn zelfstandig hun rekenkennis en vaardigheden te gebruiken in verschillende toepassingssituaties, ook in de wereld buiten de school. Wiskundig leren denken betekent dat ze niet alleen sommen kunnen uitrekenen maar ook leren probleemoplossen, modelleren en wiskundig redeneren. Hiervoor heeft de leerling een goede rekenbasis nodig.

In dit boek richten we ons vooral op het aanleren van de basale bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en het gebruik van de ERWD-modellen om zicht te krijgen op de rekenvaardigheid van de leerling en het aanbod af te stemmen op de onderwijsbehoeften van deze leerling. Om effectief les te kunnen geven is niet de volgende methodeles het uitgangspunt van de rekenles, maar de rekenvaardigheid van de leerlingen in de klas. De leerkracht moet boven de methode kunnen staan en bepalen wat de groep en de individuele leerlingen daarbinnen nodig hebben om de rekendoelen van een blok of periode onder de knie te krijgen. Dat kan betekenen dat je bepaalde leerlingen langer met een bepaald materiaal of model laat werken omdat ze de verbinding met de formele som nog niet gelegd hebben, een extra instructie toevoegt omdat een deel van de leerlingen een strategie nog onvoldoende begrijpt, langer een procedure laat inoefenen zodat zij deze uiteindelijk wel kunnen verkorten, de weegschaal verplaatst naar een rekenhoek zodat alle leerlingen gedurende de week zelf kunnen wegen of (een deel van) een les overslaat omdat de leerlingen het doel al onder de knie hebben. Met kennis van de leerlijnen en de ERWD-modellen kan de leerkracht leerlingen observeren, knelpunten en hiaten signaleren, aanbieden wat nodig is en evalueren of de leerling het doel met deze aanpak onder de knie heeft gekregen. Alle leerlingen moeten de rekendoelen aan het einde van een periode onder de knie hebben, om met succes verder te kunnen gaan. Dit vraagt naast het nadenken over een rekeninhoudelijke afstemming in de lesvoorbereiding, om het optimaal inzetten van de rekentijd en creatief omgaan met je klassenorganisatie.

Vakdidactische kennis is voor de leerkracht een vereiste om goed rekenonderwijs te kunnen verzorgen. Deze kennis staat of valt met voldoende eigen rekenkennis en vaardigheden zoals opgenomen in de Kennisbasis rekenen.

Leerdoelen

- Je kunt de visie op reken-wiskundeonderwijs die in dit boek wordt gehanteerd, benoemen en aangeven wat jij verstaat onder goed rekenonderwijs.
- Je weet welke ontwikkelingen er plaatsvinden in de maatschappij en wat dit betekent voor het reken-wiskundeonderwijs.
- Je kunt omschrijven wat functionele gecijferdheid is en wat het belang daarvan is.
- Je kunt omschrijven wat er van leerkrachten gevraagd wordt op het gebied van professionele gecijferdheid en hoe dit bijdraagt aan de resultaten van de leerlingen.
- Je weet wat de drie sporen van het sporenmodel inhouden en kunt voor jezelf aangeven wat je al wel en nog niet onder de knie hebt van spoor 1, 2 of 3.

1.1 Visie op reken-wiskundeonderwijs

Het onderwijs, en dus ook het rekenonderwijs, heeft tot doel leerlingen te begeleiden in hun ontwikkeling tot mensen die volwaardig mee kunnen doen in de samenleving. Daarmee bedoelen we mensen die zich maatschappelijk weten te redden, die (binnen hun mogelijkheden) de opleiding kunnen volgen die hun interesse heeft en die een beroep kunnen uitoefenen dat bij hen past. In deze visie is goed reken-wiskundeonderwijs onderwijs dat leerlingen opleidt tot zelfstandig denkende mensen die weten hoe ze dagelijkse rekenvraagstukken kunnen aanpakken, dit met vertrouwen doen en tot een bruikbare oplossing kunnen komen.

De leerkracht is de professional en heeft kennis van de ontwikkeling van kinderen in het algemeen en specifieke kennis van de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen. Uit onderzoek is gebleken dat de kwaliteit van de leerkracht direct effect heeft op de rekenprestaties van de leerlingen (Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen, 2009). Het gegeven dat niet de traditionele, mechanistische of realistische rekenmethode maar de leerkracht het grootste verschil maakt bij het leren rekenen, laat het belang zien van de professionaliteit van de leerkracht. De leerkrachten staan daarin niet alleen, maar werken in een team van professionals, met collega's van andere groepen, de intern begeleider (IB'er) of kwaliteitscoördinator (KC'er), de directie en vaak ook een rekencoördinator of rekenspecialist. Gezamenlijk hebben zij de zorg voor de kwaliteit van het rekenonderwijs en de optimale ontwikkeling van elke individuele leerling op school.

De rekenbasis wordt gelegd in de eerste jaren van het onderwijs, van de kleuterjaren tot en met groep 5. In deze leerjaren wordt het fundament gelegd voor de domeinen getallen, verhoudingen, meten, meetkunde en verbanden. Of en hoe de leerlingen deze basisvaardigheden onder de knie krijgen, hangt deels af van hun capaciteiten, maar ook de vakbekwaamheid van de leerkracht.

Kern

Rekenen-wiskunde is meer dan alleen technische rekenvaardigheid: je leert rekenen om de rekenvraagstukken die je in de maatschappij en in je beroep tegenkomt het hoofd te bieden. Niet de rekenmethode maar de leerkracht heeft de grootste invloed op de rekenprestaties van de leerlingen.